delle relazioni che passano fra i due sistemi di variabili, saremo certi che ciascuna di queste espressioni è *invariabile.* Se le coordinate *u, v,* del pari che le *u'9 v',* sono assunte ad arbitrio, è chiaro che i due membri dell'eguaglianza anzidetta devono essere identici nella forma. Questa circostanza non si verificherà, quando quelle variabili corrisponderanno a speciali sistemi di coordinate, ma si potrà sempre inferire legittimamente dall'eguaglianza delle due espressioni, che esse sono funzioni invariabili equivalenti.

Se poi nell'eguaglianza mancassero le funzioni 9, ^, ... e non s'avessero che le sole *E,* jF, *G* colle loro derivate, si dovrà concludere che i due membri sono funzioni *assolute,* le quali, ciascuna nel rispettivo sistema dì coordinate, esprimono una medesima proprietà geometrica, che sussiste in ogni punto della superficie, indipendentemente da qualunque flessione di questa.

XIV.

Noi possiamo già fin d'ora citare due funzioni invariabili di prim'ordine, che ci sono offerte da considerazioni geometriche semplicissime. L'ima di esse contiene un solo *argomento* od una sola funzione arbitraria 9, ed o quella che abbiamo denominata *parametro differenziale di prim'ordine* della funzione stessa: il suo quadrato si ottiene formando coll'argomento 9 l'espressione

$$EG — F^2$$

che indicheremo col simbolo (A, 9)*, già introdotto dal sig. LAMÉ. L'altra contiene due argomenti o due funzioni arbitrarie 9 e ^, e si ricava facilmente dalla considerazione dell'angolo di due curve, angolo il quale si mantiene evidentemente inalterato, in ogni flessione della superficie su cui le curve sono tracciate. Ponendo infatti

__ p i i f.
dv d v \ *d v d u* *d u d v 1* *d u d n*

e denotando con co l'angolo delle due curve 9 = cost., ^ — cost., si ha

cos

donde si vede che l'invariabilità di 03, ^9 e A$_T$A trae seco necessariamente quella di ^9^. Reciprocamente l'invariabilità di ^9'} trae seco quella di A^, il cui quadrato si ottiene ponendo 9 = ^. Inoltre dalla moltiplicazione delle forme quadratiche si deduce